

## Тема 7 Основы теории рядов.

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

где  $u_1; u_2; u_3; \dots; u_i; \dots$  - члены ряда;  $u_n$  -  $n$ -ый или общий член ряда, называется бесконечным рядом (рядом).

Если члены ряда :

- числа, то ряд называется числовым;
- числа одного знака, то ряд называется знакопостоянным;
- числа разных знаков, то ряд называется знакопеременным;
- положительные числа, то ряд называется знакоположительным;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется знакочередующимся;
- функции, то ряд называется функциональным;
- степени  $x$ , то ряд называется степенным;
- тригонометрические функции, то ряд называется тригонометрическим.

### I. Числовой ряд

#### 1.1. Основные понятия числового ряда.

**Числовым рядом** называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1.1)$$

где  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ , называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член  $u_n$  называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ .

Если при бесконечном возрастании номера  $n$  частичная сумма ряда  $S_n$  стремится к пределу  $S$ , то ряд называется сходящимся, а число  $S$  - суммой сходящегося ряда, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = S.$$

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S.$$

Если частичная сумма  $S_n$  ряда (1.1) при неограниченном возрастании  $n$  не имеет конечного предела (стремится к  $+\infty$  или  $-\infty$ ), то такой ряд называется **расходящимся**.

Если ряд **сходящийся**, то значение  $S_n$  при достаточно большом  $n$  является приближенным выражением суммы ряда  $S$ .

Разность  $r_n = S - S_n$  называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток

стремится к нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ , и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

## 1.2. Примеры числовых рядов.

**Пример 1.** Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (1.2)$$

называется *геометрическим* ( $a \neq 0$ ).

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

Известно, что сумма её первых  $n$  членов  $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$ . Очевидно: это  $n$ -ая частичная сумма ряда (1.2).

Возможны случаи:

$$|q| = 1:$$

$$q = 1:$$

Ряд (1.2) принимает вид:

$$a + a + a + \dots + a = a \cdot n = S_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot n = \infty, \text{ ряд расходится;}$$

$$q = -1$$

Ряд (1.2) принимает вид:

$$a - a + a - a + \dots,$$

$$S_n = \begin{cases} a & \text{при } n \text{ нечетном } (n = 2k + 1), \\ 0 & \text{при } n \text{ четном } (n = 2k). \end{cases}$$

$S_n$  не имеет предела, ряд расходится.

$$|q| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \text{конечное число, ряд сходится.}$$

$$|q| > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty - \text{ряд расходится.}$$

Итак, данный ряд сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ .

**Пример 2.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1.3)$$

называется *гармоническим*.

Запишем частичную сумму этого ряда:

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Сумма  $S_n$  больше суммы, представленной следующим образом:

$$S_n > \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\text{или } S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty$ , или  $S_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1) \rightarrow \infty$ .

Следовательно, если  $n \rightarrow \infty$ , то  $S_n \rightarrow \infty$ , т.е. гармонический ряд расходится.

**Пример 3.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (1.4)$$

называется *обобщенным гармоническим*.

Если  $p = 1$ , то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если  $p < 1$ , то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При  $p > 1$  имеем геометрический ряд, в котором  $|q| < 1$ ; он является сходящимся.

Итак, обобщенный гармонический ряд сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

### 1.3. Необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  может сходить только при условии, что его общий член  $u_n$  при неограниченном увеличении номера  $n$  стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  расходится – это достаточный признак расходимости ряда. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

**Признак сравнения рядов с положительными членами.**

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.

**Признак Даламбера.**

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots \quad (u_n > 0)$$

выполняется условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , то ряд сходится при  $l < 1$  и расходится при  $l > 1$ .

Признак Даламбера не дает ответа, если  $l = 1$ . В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

**Упражнения.**

Записать ряд по его заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n+1}{2^n};$$

$$u_n = \frac{n+2}{2n-1};$$

$$u_n = \frac{\lambda^n}{n!}.$$

**Решение.**

Полагая  $n = 1, n = 2, n = 3, \dots$ , имеем бесконечную последовательность чисел:

$u_1 = \frac{2}{3}, u_2 = \frac{3}{4}, \dots$ . Сложив его члены, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{n+1}{2^n} + \dots$$

Поступая так же, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n-1} = \frac{3}{1} + \frac{4}{3} + \frac{5}{5} + \dots + \frac{n+2}{2n-1} + \dots$$

Придавая  $n$  значения  $1, 2, 3, \dots$  и учитывая, что  $1! = 1, 2! = 1 \cdot 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$ , получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Найти  $n$ -ый член ряда по его данным первым членам:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots;$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{5} - \dots$$

**Решение.**

Знаменатели членов ряда, начиная с первого, являются четными числами;

следовательно,  $n$ -ый член ряда имеет вид  $\frac{1}{2n}$ .

Числители членов ряда образуют натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели – натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели – натуральный

ряд чисел, начиная с 3. Знаки чередуются по закону  $(-1)^{n+1}$  или по закону  $(-1)^{n-1}$ .

Значит,  $n$ -й член ряда имеет вид  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+2}$  или  $(-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n+2}$ .

Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} + \dots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots$$

**Решение.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = 0$$

Находим

Необходимый признак сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

$$q = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < 1$$

который сходится, так как

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3 \cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{5 \cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \dots; \quad \frac{1}{(2n-1)2^n} < \frac{1}{2^n}; \dots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} = 1, \quad 1 \neq 0$$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда; следовательно, ряд расходится.

$$\text{Находим} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \dots + \frac{1}{n^{3/2}} + \dots,$$

который сходится, поскольку  $p = \frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2} > 1$ , следовательно, сходится и данный ряд.

Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} = \frac{3}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{3^n}{n^2} + \dots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^n} + \dots$$

**Решение.**

Подставив в общий член ряда  $\frac{2n}{5^n}$  вместо  $n$  число  $n+1$ , получим  $\frac{2 \cdot (n+1)}{5^{n+1}}$ . Найдем предел отношения  $(n+1)$ -го члена к  $n$ -му члену при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1) \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{5} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{5} < 1$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = 3 \cdot 1^2 = 3, \quad 3 > 1. \end{aligned}$$

Значит, данный ряд расходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} : \frac{n!}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty, \quad \infty > 1$$

, т.е. ряд расходится.

## II. Знакопеременный ряд

### 2.1 Понятие знакопеременного ряда.

Числовой ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

называется **знакопеременным**, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд называется **знакопередающим**, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

где  $u_n > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно). Например,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots;$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1} + \dots;$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n} + \dots$$

Для знакопередающих рядов имеет место достаточный признак сходимости (установленный в 1714г. Лейбницем в письме к И.Бернулли).

### 2.2 Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда.

Теорема (Признак Лейбница).

**Знакопередающийся ряд сходится, если:**

*Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает,*

*т.е.  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ ;*

*Общий член ряда стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .*

*При этом сумма  $S$  ряда удовлетворяет неравенствам*

$$0 < S < u_1.$$

**Замечания.**

Исследование знакопередающегося ряда вида

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на  $(-1)^k$  к исследованию ряда  $+u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ .

Ряды, для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются **лейбницевскими** (или рядами Лейбница).

Соотношение  $0 < S < u_1$  позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму  $S$  данного ряда его частичной суммой  $S_n^*$ .

Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакопередающийся ряд  $(-1)^{n+1} (u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$ , сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т.е.  $S_n^* < u_{n+1}$ . Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

**Пример.** Вычислить приблизительно сумму ряда

Решение: данный ряд Лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots = S$$

Взяв пять членов, т.е. заменив  $S$  на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0,7834$$

чем  $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0,00003$ . Итак,  $S \approx 0,7834$ .

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

**Теорема.** Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots,$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд расходится, то данный ряд называется **условно** (неабсолютно) **сходящимся**.

### 2.3. Упражнения.

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots;$$

**Решение.**

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, является гармоническим рядом, который, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \dots;$$

**Решение.**

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1 > \frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{4}{7} > \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \neq 0$$

Ряд расходится, так как признак Лейбница не выполняется.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots;$$

**Решение.**

Используя признак Лейбница, получим

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Это геометрический ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ , где  $q = \frac{1}{2}$ , который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots;$$

**Решение.**

Используя признак Лейбница, имеем

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$$

или

$$1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \dots$$

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как  $p = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < 1$ . Следовательно, данный ряд сходится условно.

### III. Функциональный ряд

#### 3.1. Понятие функционального ряда.

Ряд, членами которого являются функции от  $x$ , называется **функциональным**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \dots + u_n(x_n) + \dots$$

Придавая  $x$  определенное значение  $x_0$ , получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка  $x_0$  называется **точкой сходимости** функционального ряда; если же ряд расходится – **точкой расходимости** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента  $x$ , при которых функциональный ряд сходится, называется его **областью сходимости**.



В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от  $x$ :  $S = S(x)$ .

Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \text{ где}$$

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  - частичная сумма ряда.

**Пример.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .

**Решение.** Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем  $q = x$ .

Следовательно, этот ряд сходится при  $|x| < 1$ , т.е. при всех  $x \in (-1; 1)$ ; сумма ряда

равна  $\frac{1}{1-x}$ ;

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ при } |x| < 1.$$

### 3.2. Степенные ряды.

**Степенным рядом** называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

где числа  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  называются **коэффициентами ряда**, а член  $a_n x^n$  - общим членом ряда.

**Область сходимости** степенного ряда называется множеством всех значений  $x$ , при которых данный ряд сходится.

Число  $R$  называется **радиусом сходимости** степенного ряда, если при  $|x| < R$  ряд сходится и притом абсолютно, а при  $|x| > R$  ряд расходится.

Радиус сходимости найдем, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad (x \text{ не зависит от } n),$$

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

т.е. если степенной ряд сходится при любых  $x$ , удовлетворяющих данному условию и

$$|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

расходится при

Отсюда следует, что если существует предел

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots),$$

то радиус сходимости ряда  $R$  равен этому пределу и степенной ряд сходится при  $|x| < R$ , т.е. в промежутке  $-R < x < R$ , который называется **промежутком (интервалом) сходимости**.

Если  $R = 0$ , то степенной ряд сходится в единственной точке  $x = 0$ .

На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться.

Сходимость степенного ряда при  $x = -R$  и  $x = R$  исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

### 3.3. Упражнения.

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

**Решение.** Найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

**Решение.** Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{2n+1}| \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot |x^{2n-1}|} = |x^2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = x^2 \cdot 1 = x^2$$

Ряд абсолютно сходится, если  $x^2 < 1$  или  $-1 < x < 1$ . Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При  $x = -1$  имеем ряд  $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$ , который сходится по признаку Лейбница.

При  $x = 1$  имеем ряд  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  - это тоже сходящийся Лейбницевский ряд.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок  $[-1, 1]$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$$

**Решение.** Найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n \cdot 2}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

Следовательно, ряд сходится при  $-2 < x+2 < 2$ , т.е. при  $-4 < x < 0$ .

При  $x = -4$  имеем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , который сходится по признаку Лейбница.

При  $x = 0$  имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток  $[-4, 0)$ .

### IV. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Для приложений важно уметь данную функцию  $f(x)$  разлагать в степенной ряд, т.е. функцию  $f(x)$  представлять в виде суммы степенного ряда.

**Рядом Тейлора** для функции  $f(x)$  называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Если  $a = 0$ , то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

который называется **рядом Маклорена**.

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и исходный ряд.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилам сложения и умножения многочленов. При этом промежуток сходимости полученного нового ряда совпадает с общей частью промежутков сходимости исходных рядов.

**Для разложения функции  $f(x)$  в ряд Маклорена необходимо:**

Вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке  $x = 0$ , т.е.  $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0)$ ;

Составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу ряда Маклорена;

Найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

**Таблица**, содержащая разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; 1]$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; 1]$$

**Пример 1.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = 3^x$ .

**Решение.** Так как  $f(x) = 3^x = e^{x \ln 3} = e^{x h^3}$ , то, заменяя  $x$  на  $x \ln 3$  в разложении  $e^x$ , получим:

$$f(x) = 3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!}x^3 + \dots + \frac{\ln^n 3}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

**Пример 2.** Выписать ряд Маклорена функции  $f(x) = \ln(4-x)$ .

**Решение.** Так как  $f(x) = \ln(4-x) = \ln 4 \left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln \left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)$ ,

воспользовавшись формулой (5), в которой заменим  $x$  на  $\left(-\frac{x}{4}\right)$ , получим:

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \dots,$$

или

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots,$$

если

$$-1 < -\frac{x}{4} \leq 1, \quad \text{т.е. } -4 \leq x < 4.$$

**Пример 3.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \frac{2}{3-x}$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (4). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},$$

то заменив  $x$  на  $\frac{x}{3}$  получим:

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots\right), \text{ или}$$

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} + \dots,$$

$$\text{где } -1 < \frac{x}{3} < 1, \quad \text{т.е. } -3 < x < 3.$$

#### V. Практические задания для самоконтроля студентов.

При помощи признака сравнения рядов установить сходимость или расходимость рядов:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3 \cdot 2} + \frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{6}{5 \cdot 4} + \dots + \frac{n+2}{(n+1)n} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

Исследовать по признаку Даламбера сходимость рядов:

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1} \cdot (2n-1)} + \dots$$

$$1 + \frac{5}{2!} + \frac{5^2}{3!} + \dots + \frac{5^{n-1}}{n!} + \dots$$

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2}{2 \cdot 3} + \frac{2^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2^n}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots$$

$$1 + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{3^2} + \frac{4^2}{3^3} + \dots + \frac{n^2}{3^{n-1}} + \dots$$

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots;$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots;$$

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots;$$

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots;$$

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$$

Найти промежутки сходимости нижеследующих рядов и выяснить вопрос об их сходимости на концах промежутков сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 3^n};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{(n+1) 4^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{n}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

Используя разложения в ряд Маклорена функции  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ , разложить степенные ряды функции:

$$y = e^{4x}$$

$$y = e^{-x^2}$$

$$y = \sin 3x$$

$$y = \sin^2 x$$

$$y = \ln \left( 1 + \frac{x}{3} \right).$$

## VI. Ответы

### I.

1. сходится;
2. расходится;
3. сходится;
4. сходится;
5. расходится;
6. сходится;
7. сходится;
8. расходится;
9. сходится;
10. сходится.

### II.

1. сходится абсолютно;
2. сходится абсолютно;
3. сходится условно;
4. сходится условно;
5. сходится абсолютно.

### III.

1.  $-3 \leq x < 3$ ;
2.  $-4 < x \leq 4$ ;
3.  $-1 < x \leq 1$ ;
4.  $-1 \leq x \leq 1$ ;
5.  $-4 \leq x \leq -2$ .

### IV.

$$1 + 4x + \frac{4^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{4^n x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{3^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{3^n \cdot n} + \dots \quad (-3 < x \leq 3).$$